مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

الحلول التحليلية لأنظمة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني

*فاطمة التهامي زقوط، آمنة ناصر الخالدي[1]

[1]قسم الرياضيات – كلية العلوم–جامعة مصراتة – ليبيا

الملخص:

تَتَناول هذه الورقة البحثية دراسة بعض الطرق التحليلية لحل أنظمة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني، حيث تضمنت دراسة طريقة تحليل أدوميان المعدلة، وطريقة تحويل لإبلاس وتطبيقهما لحل نماذج مختلفة لهذا النوع من المعادلات. تبيّن من الدراسة، أن كلا الطريقتين فعالتان ومناسبتان لحل هذا النوع من المعادلات؛ ولكن تحليلية أدوميان المعدلة تُعدّ الأسهل في التطبيق مع عمليات حسابية أقل مقارنة بطريقة تحويل لا بلاس المطبقة. في هذا البحث تمّ الاستعانة ببرنامج *Maple18* لحساب قيم المحددات وبعض التكاملات المعقدة.

الكلمات المفتاحية: المعادلة التكاملية، المعادلة التكاملية ضعيفة الاعتلال، طريقة أدوميان التحليلية.

Analytical solutions of Systems of Linear Weakly Singular Volterra integral equations of the second Kind

*Fatma Al Tuhami Zaggout and Amna Nasser Al–Khalidi[1]

[1]Department of Mathematics – Faculty of Science – Misrata University – Libya

Abstract

This research paper deals with the study of some analytical methods for solving systems of linear Weakly Singular Volterra Integral Equations of the Second Kind. It included the Modified Adomian decomposition method, the Laplace transform method and their application to solve different models of this type of equations. Through this study, it is clear that both methods are effective and suitable for solving this type of equations, but the modified Edomian analysis is considered the easiest to apply with fewer calculations compared to the applied Laplace transform method. In this research, the Maple18 program was used to calculate the values of determinants and some complex integrals.

Keywords: integral equation, weakly sigular integral equation, Adomian analytical method.

المقدمة:

تُعدّ المعادلات التكاملية أحد المواضيع المتقدمة في الرياضيات، وهي تمثل حلقة وصل ما بين الرياضيات البحتة، والرياضيات التطبيقية، ولا تقلُ أهمية عن المعادلات التفاضلية، من حيث النظرية والتطبيق. في الوقت الحالي، ومن منتصف القرن الماضي، أصبحت أغلب نظريات المعادلات التكاملية، تُبنى أساساً على التحليل الدالي، وبسبب تطبيقاتها الواسعة في العلوم والتكنولوجيا، استحوذت المعادلات التكاملية في السنوات الأخيرة على اهتمام العديد من العلماء والباحثين؛ إذ تكتسب هذه المعادلات أهمية كبيرة في تفسير عدة ظواهر طبيعية سواء كانت فيزيائية، كيميائية، ميكانيكية، مسائل بيولوجية وبعض النظريات الهامة، كالنظريات الكهرومغناطيسية، والكهووستاتيكية، ونظرية الاحتمال. كذلك تظهر هذه المعادلات في نظرية

* مؤلف البحث: عناوين البريد الإلكتروني fazali98@yahoo.com تاريخ استلام البحث 25 نوفمبر2023 استلام رد المحكمين 9 أي النار 2024- تم قبوله 31 أي النار 2024

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

الجهد أكثر من أي مجال آخر [1−2]. أيضاً تُسهم أنظمة هذه المعادلات في دراسة المواد ذات المرونة اللزجة، وفي المجال الإحصائي من خلال علم التركيبة السكانية [2]. إضافة إلى ذلك، يتمّ استخدام هذه المعادلات؛ لحل الأنظمة الديناميكية للموائع [5]، وتُسهم بشكلٍ كبيرٍ في فهم وتفسير نظرية الأوتار الفائقة، والتي يسميها العلماء نظرية كلّ شيء ويعكفون على استخدامها لتفسير ظاهرة الوجود الكوني.

تَتَدرج أهمية هذا البحث على استخدام الطرق التحليلية؛ لحلّ أنظمة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني؛ لكونها من أهم المعادلات التكاملية التي تظهر في العديد من فروع المجالات العلمية، والكثير من التطبيقات الهندسية، مثل التوصيل الحراري (*heat conduction*)، والنمو البلوري (*crystal growth*)، والكهروكيميائية (*electrochemistry*) [1−4] وغيرها من التطبيقات الأخرى.

قَام العديد من الباحثين بعدة أبحاث ودراسات تتناول حلّ هذا النوع من المعادلات والأنظمة الخطية وغير الخطية منها، من ضمنها تمّ تقديم طريقة حسابية جديدة لحل معادلة ابيل التكاملية (النوع الأول والثاني) [7]، يعتمد فيها المخطط العددي على تقديرات تقريبية على أساس المويجات (*Daubechies*)، وتبيّن أن الطريقة تعمل بشكلٍ جيدٍ مع الدقة المنخفضة، أيضاً تم استخدام طريقة تاو التشغيلية [9]؛ لإيجاد الحل التقريبي لمعادلات فولتيرا التكاملية غير الخطية ضعيفة الاعتلال. الميزة الرئيسة للطريقة المقترحة، هي أنها تحول المسألة الأساسية إلى نظام غير خطي من المعادلات الجبرية مما يبسط الحسابات. بالإضافة إلى ذلك، تم دراسة طريقة المصفوفة التشغيلية (*operational matrices*) [8]؛ لحل أنظمة معادلات فولتيرا التكاملية ضعيفة الاعتلال، كما تم اقتراح خوارزمية سهلة الاستخدام تعتمد على طريقة هوموتوبي الاضطراب (*HPM*)، أظهرت تقارب الحلول التقريبية إلى الحلول الفعلية في حلّ مثل هذا النوع من أنظمة معادلات ابيل التكاملية [11]، وغيرها من الدراسات. انظر[6−10].

تعريف 1:

المعادلة التكاملية: [1] [2]

تُعرف المعادلة التكاملية، بأنها المعادلة التي تكون فيها الدالة المجهولة u داخل علامة التكامل وقد تضاف أيضا خارج علامة التكامل في أحد طرفي المعادلة، والصيغة القياسية للمعادلة التكاملية في الدالة $u(x)$ تكون

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt,$$

حيث

1- u هي الدالة المجهولة التي يتطلب تحديدها و f دالة متصلة في x .

2- k دالة في متغيرين تسمي نواة (*kernel*) المعادلة التكاملية قد تكون متصلة أو غير متصلة.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

3- $\beta(x)$, $\alpha(x)$ دوال في x وتمثلان الحدين الأدنى، والأعلى للتكامل على الترتيب و λ بارامتر(ثابت) يسمي وسيط المعادلة التكاملية. إذا ظهرت الدالة u تحت علامة التكامل فقط، فإنها تسمى معادلة تكاملية من النوع الأول، أما إذا ظهرت داخل وخارج علامة التكامل، فإنها تسمى معادلة تكاملية من النوع الثاني.

تعريف 2:

المعادلة التكاملية ضعيفة الاعتلال (شبه المعتلة) [1]

المعادلة التكاملية تكون ضعيفة الاعتلال إذا كانت النواة غير محددة عند نقطة واحدة فقط في نطاق التكامل مثال:

$$u(x) = \sqrt{x} - 2\pi x + 4\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt.$$

نلاحظ هنا أن النواه تكون غير محددة عند نقطة واحدة $t = x$.

تعريف 3:

معادلة فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال [1]

(*The linear Weakly Singular Volterra Integral Equation*)

من أهم صيغ معادلة فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني الصورة

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{\sqrt{x-t}} u(t)dt, \qquad x \in [0, T] \qquad (1)$$

حيث β ثابث و ($T = 1$ أو 2 أو 3) وذلك حسب النموذج التطبيقي [2].

والصيغة المعممة لهذه المعادلة

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\beta}{[g(x) - g(t)]^{\alpha}} u(t)dt \quad , \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (2)$$

تصنف هذه المعادلات على أنها ضعيفة الاعتلال بسبب النواة حيث $k(x,t) \to \infty$ عندما $t \to x$؛ لضمان حلٍ وحيدٌ للمعادلتين (1) و(2) يفترض أن الدالة f تكون ناعمة (*smooth*) بدرجة كافية [2].

2-الشكل العام للمنظومة:

بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني على الصورة

$$u_1(x) = f_1(x) + \int_0^x \Big(K_{11}(x,t)u_1(t)dt + K_{12}(x,t)u_2(t) + \cdots + K_{1j}(x,t)u_j(t)\Big)\, dt,$$

$$u_2(x) = f_2(x) + \int_0^x (K_{21}(x,t)u_1(t)dt + K_{22}(x,t)u_2(t) + \cdots + K_{2j}(x,t)u_j(t))dt,$$

$$\vdots$$

$$u_i(x) = f_i(x) + \int_0^x (K_{i1}(x,t)u_1(t)dt + K_{i2}(x,t)u_2(t) + \cdots + K_{ij}(x,t)u_j(t))dt,$$

حيث

f_i, $i = 1,2,3, \ldots$ دوال معلومة ذات قيم حقيقية، و$K_{ij}, i = j = 1,2,3, \cdots$ نواة المعادلة التكاملية من النوع الفرقي أي تأخذ الصورة التالية:

$$K_{ij}(x,t) = \frac{1}{[g(x) - g(t)]^{\alpha_{ij}}}$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

3-آلية الحل:

في هذا البند نتناول طريقتين من أهم الطرق التحليلية المستخدمة لحل أنظمة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني، وهي:

أولاً: طريقة تحليل أدوميان المعدلة [1]

(*The Modified Adomian Decomposition Method*)

طريقة تحليل أدوميان، سميت بهذا الاسم نسبة إلى الرياضي الأمريكي جورج أدوميان (*George Adomian*) (1996-1922)، وهي من الطرق التحليلية المهمة في حل المعادلات التكاملية، وتعتمد على فرض حل للمعادلة التكاملية على صورة متسلسلة لانهائية

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

وقد تمّ تطوير هذه الطريقة بواسطة العالم *wazwaz* بحيث تعتمد طريقة تحليل أدوميان **المعدلة** على تقسيم الدالة f إلى جزأين f_1 و f_2، ويتمّ وضع الجزء الأول f_1 مساوياً للمركبة الصفرية u_0 و اضافة الجزء الثاني f_2 للمركبة الأولى u_1.

بفرض لدينا منظومة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني في مجهولين u و v

$$u(x) = f_1(x) + \int_0^x (K_{11}(x,t)u(t) + K_{12}(x,t)v(t))dt,$$

$$v(x) = f_2(x) + \int_0^x (K_{21}(x,t)u(t) + K_{22}(x,t)v(t))dt.$$

يتمّ فرض الدالتين الخطيتين $u(x)$ و $v(x)$ على صورة متسلسلتين لانهائيتين

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad , \qquad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \qquad (3)$$

حيث المركبات $u_n(x)$ و $v_n(x)$, $n \geq 0$ هي مركبات الحل لـ $u(x)$ و $v(x)$ والتي يتمّ تحديدها بشكل تكراري.

بتقسيم الدالتين f_1 و f_2 إلى

$$f_1 = f_{11} + f_{12} \quad , \qquad f_2 = f_{21} + f_{22}.$$

وبوضع

$$u_0(x) = f_{11} \quad , \quad v_0(x) = f_{21}$$

بالتالي

$$\begin{cases} u_1(x) = f_{12}(x) + \int_0^x \big(K_{11}(x,t)u_0(t) + K_{12}(x,t)v_0(t)\big)dt \\ v_1(x) = f_{22}(x) + \int_0^x (K_{21}(x,t)u_0(t) + K_{22}(x,t)v_0(t))dt \end{cases} , \qquad (4)$$

$$\vdots$$

ويتمّ تحديد باقي المركبات u_n و v_n حيث $n \geq 2$ من الصيغة التكرارية التالية:

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = \int_0^x \big(K_{11}(x,t)u_n(t) + K_{12}(x,t)v_n(t)\big)dt \\ v_{n+1}(x) = \int_0^x (K_{21}(x,t)u_n(t) + K_{22}(x,t)v_n(t))dt \end{cases} , \quad n \geq 1$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

الآن بالتعويض عن المركبات $u_n(x)$ و $v_n(x)$, $n \geq 0$ في المتسلسلة (3) يتمّ تحديد حلِّ المنظومة المعطاة.

♦ **تقارب طريقة أدوميان**[12] (*Convergence of Adomian's Method*)

نظرية:

إذا كانت $N(u)$ دالة تحليلية في u على الفترة $(-R, R)$ وكانت u دالة يمكن تمثيلها بمتسلسلة لانهائية $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ، فإن التمثيل البارامتري $u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda_n$ يكون متقاربا مطلقا لكل $\lambda \in [-1,1]$ والمتسلسلة u يمكن تحديدها بواسطة:

$$\frac{m'}{(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{1}{(1+\varepsilon)}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)+\cdots+\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^n+\cdots\right),$$

حيث $m' \geq m$ (m النهاية العليا للمركبات u_n)، $\varepsilon > \frac{m}{R}$ و $\rho \geq 1$ تكون المتسلسلة الثنائية

$$N(u) = a_0 + a_1 u_0 + a_2 u_0^2 + \cdots + a_n u_0^n + a_1 u_1 \lambda$$
$$2a_2 u_0 u_1 \lambda + \cdots + n a_n u_0^{n-1} u_1 \lambda + \cdots + a_1 u_2 \lambda^2$$
$$+a_2(u_1^2 + 2u_0 u_2) + \cdots + \cdots$$

متقاربة عند $\lambda = 1$.

البرهان: انظر[12].

قبل أن نتناول طريقة تحويل لابلاس نستعرض القاعدة التالية:

♦ **قاعدة كرامر**[1] (*Cramer's Rule*)

قاعدة كرامر، تستخدم لحل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المحددات، حيث تسمح هذه القاعدة بحلِّ منظومة من المعادلات، وإيجاد قيمة متغيّر واحد بشكلٍ مستقلٍ دون الحاجة إلى إيجاد قيم جميع المتغيرات.

فبفرض منظومة المعادلات التالية في x و y

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

حيث a_1 و a_2 , b_1 , b_2 , c_1, c_2 ثوابت. يمكن إعادة كتابة المنظومة السابقة على شكل مصفوفة كالاتي

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

إذا كان محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

فإن

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ملاحظة:

- قاعدة كرامر قابلة للتطبيق؛ في حالة عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.
- يجب أن يكون محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي الصفر.

ثانياً: طريقة تحويل لابلاس[1] *The Laplace Transform Method*

إذا كانت الدالة f دالة معرفة بحيث $t \geq 0$ ، فان تحويل لابلاس لهذه الدالة يرمز له بالرمز L ويعطى بـ

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

حيث s عدد حقيقي.
الضرب الالتفافي لتحويل لابلاس، $L\{(f*g)(x)\}$ يعطى بالمعادلة

$$L\{(f*g)(x)\} = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = F(s)G(s).$$

حيث f و g دالتين متصلتين جزئياً.
ولتوضيح كيفية تطبيق التحويل نفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني في مجهولين u و v

$$\begin{cases} u(x) = f_1(x) + \int_0^x \big(k_{11}(x-t)u(t) + k_{12}(x-t)v(t)\big)dt, \\ v(x) = f_2(x) + \int_0^x \big(k_{21}(x-t)u(t) + k_{22}(x-t)v(t)\big)dt. \end{cases} \tag{5}$$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المنظومة (5) يكون لدينا

$$\begin{cases} U(s) = F_1(s) + k_{11}(s)U(s) + k_{12}(s)V(s) \\ V(s) = F_2(s) + k_{21}(s)U(s) + k_{22}(s)V(s)' \end{cases} \tag{6}$$

وبترتيب حدود المنظومة (6) نحصل على

$$\begin{cases} \big(1-k_{11}(s)\big)U(s) - k_{12}(s)V(s) = F_1(s) \\ -k_{21}(s)U(s) + \big(1-k_{22}(s)\big)V(s) = F_2(s)' \end{cases} \tag{7}$$

لحل المنظومة (7) يمكن استخدام قاعدة كرامر حيث

$$U(s) = \frac{\begin{vmatrix} F_1(s) & -k_{12}(s) \\ F_2(s) & 1-k_{22}(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-k_{11}(s) & -k_{12}(s) \\ -k_{21}(s) & (1-k_{22}(s) \end{vmatrix}},$$

$$V(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1-k_{11}(s) & F_1(s) \\ -k_{21}(s) & F_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-k_{11}(s) & -k_{12}(s) \\ -k_{21}(s) & 1-k_{22}(s) \end{vmatrix}}.$$

بشرط

$$\begin{vmatrix} 1-k_{11}(s) & -k_{12}(s) \\ -k_{21}(s) & 1-k_{22}(s) \end{vmatrix} \neq 0$$

بإتباع نفس الخطوات يمكن تعميم الحل لجميع الأنظمة.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

الجدول التالي [3] يبين تحويل لابلاس لبعض الدوال المستخدمة في البحث:

$f(t)$	$F(s)=L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \geq 0$
t^k	$\frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}, \quad k > -1$

4 -أمثلة:

في هذا البند نستعرض حلّ ثلاثة أمثلة بالطريقتين المبينتين سابقاً.

مثـــال (1)

بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال[8]

$$u(x)=x+2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\big(u(t)+v(t)\big)dt,$$

$$v(x)=1+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}v(t)dt.$$

لحل هذه المنظومة:

أولا: باستخدام طريقة تحليل أدوميان المعدلة

يتم تقسيم الدالتين f_1 و f_2 إلى

$$f_{11}=x, \qquad f_{12}=2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$f_{21}=1, \qquad f_{22}=\sqrt{x}$$

وبوضع

$$u_0(x)=f_{11}=x \;, \;\; v_0(x)=f_{21}=1$$

وبالتعويض عن u_0 و v_0 في المنظومة (4) نحصل على

$$\begin{cases} u_1(x)=2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}(t+1)dt \\ v_1(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}dt \end{cases} \qquad (8)$$

باستخدام $Maple18$ يتم حساب قيم التكاملات في المنظومة (8) حيث

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}(t+1)dt=2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}dt=2\sqrt{x}$$

وبالتعويض عن ناتج التكاملات في المنظومة (8) ينتج أن

$$u_1(x)=0 \;\;, v_1(x)=0$$

هذا يؤدي إلى

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$u_{k+1}(x)=0\quad ,v_{k+1}(x)=0\quad k\geq 0$$

وبالتالي حلّ المنظومة المعطاة يكون

$$(u(x),v(x))=(x,1).$$

ثانيا: باستخدام طريقة تحويل لابلاس:

بما أن

$$\begin{cases} f_1(x)=x+2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ f_2(x)=1+\sqrt{x} \\ k_{11}(x,t)=\frac{-1}{\sqrt{x-t}}\quad ,k_{12}(x,t)=\frac{-1}{\sqrt{x-t}} \\ k_{21}(x,t)=0\quad ,k_{12}(x,t)=\frac{-1}{2\sqrt{x-t}} \end{cases} \tag{9}$$

بتطبيق تحويل لابلاس على الدوال في المنظومة (9) نحصل على

$$\begin{cases} F_1(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} \\ F_2(s)=\frac{1}{s}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}} \\ k_{11}(s)=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\quad ,k_{12}(s)=-\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} \\ k_{21}(s)=0\,,k_{22}(s)=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{1}{2}}} \end{cases} \tag{10}$$

وبالتعويض عن دوال المنظومة (10) في المنظومة (7) نحصل على

$$\begin{cases} \left(1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}\right)U(s)+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}V(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} \\ \left(1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{1}{2}}}\right)V(s)=\frac{1}{s}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{11}$$

الآن بتطبيق قاعدة كرامر على المنظومة (11) ينتج أن

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$U(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{s^2}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{5}{2}}} & \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\\ \frac{1}{s}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}} & 1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{1}{2}}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\\ 0 & 1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{1}{2}}}\end{vmatrix}}$$

أو

$$U(s)=\frac{3\sqrt{\pi}s^{\frac{5}{2}}+2s^3+\pi s^2}{s^4(\sqrt{s}+\sqrt{\pi})(2\sqrt{s}+\sqrt{\pi})}$$
$$U(s)=\frac{1}{s^2}$$

وبالمثل

$$V(s)=\frac{\begin{vmatrix}1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & \frac{1}{s^2}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{5}{2}}}\\ 0 & \frac{1}{s}+\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}\\ 0 & 1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{1}{2}}}\end{vmatrix}}$$

أو

$$V(s)=\frac{2s^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\pi}s}{s^2(2\sqrt{s}+\sqrt{\pi})}$$
$$V(s)=\frac{1}{s}$$

وبالتالي للحصول على حل المنظومة المعطاة يتمّ أخذ تحويل لابلاس العكسي لـ $U(s)$ و $V(s)$ حيث

$$u(x)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=x,$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$v(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$$

مثـــال (2)

بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال[11]

$$u(x) = \sqrt{x} - \frac{343}{195}x^{\frac{20}{7}} - \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{6})}{2\Gamma(\frac{7}{3})}x^{\frac{4}{3}} + \int_0^x \frac{11u(t)}{(x-t)^{\frac{1}{6}}}dt + \int_0^x \frac{4w(t)}{(x-t)^{\frac{1}{7}}}dt,$$

$$v(x) = x^{\frac{1}{3}} - \frac{5x}{2} - \frac{50}{3\sqrt{3}}\pi x - \frac{125}{63}x^{\frac{14}{5}} + \frac{5}{\pi}\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt + \int_0^x \frac{25v(t)}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt + \int_0^x \frac{4w(t)}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}dt,$$

$$w(x) = x^2 - \frac{27}{10}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{25}{12})}x^{\frac{13}{12}} + \int_0^x \frac{9v(t)}{(x-t)^{\frac{1}{4}}}dt + \int_0^x \frac{4w(t)}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt.$$

والحل لهذه المنظومة:

أولا: باستخدام طريقة تحليل أدوميان المعدلة:

بتقسيم الدوال f_1 , f_2 و f_3 إلى

$$f_{11} = \sqrt{x}, \qquad f_{12} = -\frac{343}{195}x^{\frac{20}{7}} - \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{6})}{2\Gamma(\frac{7}{3})}x^{\frac{4}{3}}$$

$$f_{21} = x^{\frac{1}{3}}, \qquad f_{22} = -\frac{5x}{2} - \frac{50}{3\sqrt{3}}\pi x + \frac{125}{63}x^{\frac{14}{5}}$$

$$f_{31} = x^2, \qquad f_{32} = -\frac{27}{10}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{25}{12})}x^{\frac{13}{12}}$$

وبوضع

$$u_0(x) = \sqrt{x}\ , \quad v_0(x) = x^{\frac{1}{3}}\ , \quad w_0(x) = x^2$$

وبالتعويض عن u_0, v_0 و w_0 في المنظومة (4) نحصل على المركبات:

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$\begin{cases} u_1(x) = -\frac{343}{195}x^{\frac{20}{7}} - \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{6})}{2\Gamma(\frac{7}{3})}x^{\frac{4}{3}} + \int_0^x \frac{11\sqrt{t}}{(x-t)^{\frac{1}{6}}}dt + \int_0^x \frac{4t^2}{(x-t)^{\frac{1}{7}}}dt \\ v_1(x) = -\frac{5x}{2} - \frac{50}{3\sqrt{3}}\pi x - \frac{125}{63}x^{\frac{14}{5}} \\ \qquad + \frac{5}{\pi}\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt + \int_0^x \frac{25t^{\frac{1}{3}}}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt + \int_0^x \frac{4t^2}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}dt \\ w_1(x) = -\frac{27}{10}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{25}{12}\right)}x^{\frac{13}{12}} + \int_0^x \frac{9t^{\frac{1}{3}}}{(x-t)^{\frac{1}{4}}}dt + \int_0^x \frac{4t^2}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt \end{cases} \quad (12)$$

باستخدام $Maple18$ يتم حساب قيم التكاملات في المنظومة (12) حيث

$$\int_0^x \frac{11\sqrt{t}}{(x-t)^{\frac{1}{6}}}dt + \int_0^x \frac{4t^2}{(x-t)^{\frac{1}{7}}}dt = \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{5}{6})}{2\Gamma(\frac{7}{3})}x^{\frac{4}{3}} + \frac{343}{195}x^{\frac{20}{7}}$$

$$\frac{5}{\pi}\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}dt + \int_0^x \frac{25t^{\frac{1}{3}}}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt + \int_0^x \frac{4t^2}{(x-t)^{\frac{1}{5}}}dt = \frac{5x}{2} + \frac{50}{3\sqrt{3}}\pi x + \frac{125}{63}x^{\frac{14}{5}}$$

و

$$\int_0^x \frac{9t^{\frac{1}{3}}}{(x-t)^{\frac{1}{4}}}dt + \int_0^x \frac{4t^2}{(x-t)^{\frac{1}{3}}}dt = \frac{9\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{25}{12})}x^{\frac{13}{12}} + \frac{27}{10}x^{\frac{8}{3}}$$

بالتعويض عن ناتج التكاملات في المنظومة (12) نحصل علي

$$u_1(x) = 0 \;\; , v_1(x) = 0 \;\; , w_1(x) = 0$$

وبالتالي

$$u_{k+1}(x) = 0 \;\; , v_{k+1}(x) = 0 \;\; , w_{k+1}(x) = 0 \quad k \geq 0$$

و هنا حلّ المنظومة المعطاة يكون

$$(u(x), v(x), w(x)) = \left(\sqrt{x}, x^{\frac{1}{3}}, x^2\right).$$

ثانيا: باستخدام طريقة تحويل لابلاس:

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المنظومة المعطاة حيث

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$\begin{cases} U(s)=\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}}-8\dfrac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{27}{7}}}-\dfrac{11\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2s^{\frac{7}{3}}}+11\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}}U(s)+4\dfrac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}}W(s) \\ V(s)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3s^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{5}{2s^2}-\dfrac{50\pi}{3\sqrt{3}s^2}-\dfrac{8\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{19}{5}}}+\dfrac{5}{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}U(s) \\ \qquad +25\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}}V(s)+4\dfrac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}}W(s) \qquad (13) \\ W(s)=\dfrac{2}{s^3}-8\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{11}{3}}}-\dfrac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{s^{\frac{25}{12}}}+9\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}}V(s)+4\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}}W(s) \end{cases}$$

وبترتيب حدود المنظومة (13) :

$$\begin{cases} \left(1-11\dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}}\right)U(s)-4\dfrac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}}W(s)=\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}}-8\dfrac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{27}{7}}}-\dfrac{11\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2s^{\frac{7}{3}}} \\ -\dfrac{5}{\pi}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}U(s)+\left(1-25\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}}\right)V(s)-4\dfrac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}}W(s) \\ \qquad =\dfrac{\Gamma(\frac{1}{3})}{3s^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{5}{2s^2}-\dfrac{50\pi}{3\sqrt{3}s^2}-\dfrac{8\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{19}{5}}} \qquad (14) \\ -9\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}}V(s)+(1-4\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}})W(s)=\dfrac{2}{s^3}-8\dfrac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{11}{3}}}-\dfrac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{s^{\frac{25}{12}}} \end{cases}$$

الآن بتطبيق قاعدة كرامر على المنظومة (14) ينتج أن

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$U(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}}-8\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{27}{7}}}-\frac{11\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2s^{\frac{7}{3}}} & 0 & -4\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}} \\ \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{3s^{\frac{4}{3}}}-\frac{5}{2s^2}-\frac{50\pi}{3\sqrt{3}s^2}-\frac{8\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{19}{5}}} & 1-25\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} & -4\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}} \\ \frac{2}{s^3}-8\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{11}{3}}}-\frac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{s^{\frac{25}{12}}} & -9\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}} & 1-4\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-11\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}} & 0 & -4\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}} \\ -\frac{5}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & 1-25\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} & -4\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}} \\ 0 & -9\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}} & 1-4\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} \end{vmatrix}}$$

أي

$$U(s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

$$V(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1-11\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}} & \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}}-8\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{27}{7}}}-\frac{11\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2s^{\frac{7}{3}}} & -4\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}} \\ -\frac{5}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{3s^{\frac{4}{3}}}-\frac{5}{2s^2}-\frac{50\pi}{3\sqrt{3}s^2}-\frac{8\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{19}{5}}} & -4\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}} \\ 0 & \frac{2}{s^3}-8\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{11}{3}}}-\frac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{s^{\frac{25}{12}}} & 1-4\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-11\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}} & 0 & -4\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}} \\ -\frac{5}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & 1-25\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} & -4\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}} \\ 0 & -9\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}} & 1-4\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} \end{vmatrix}}$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

وبالتالي

$$V(s) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9\Gamma(\frac{2}{3})s^{\frac{4}{3}}}$$

وبالمثل

$$W(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 11\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}} & 0 & \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2s^{\frac{3}{2}}} - 8\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{27}{7}}} - \frac{11\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2s^{\frac{7}{3}}} \\ -\frac{5}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & 1 - 25\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} & \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{3s^{\frac{4}{3}}} - \frac{5}{2s^2} - \frac{50\pi}{3\sqrt{3}s^2} - \frac{8\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{19}{5}}} \\ 0 & -9\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}} & \frac{2}{s^3} - 8\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{11}{3}}} - \frac{9\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{s^{\frac{25}{12}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - 11\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{s^{\frac{5}{6}}} & 0 & -4\frac{\Gamma\left(\frac{6}{7}\right)}{s^{\frac{6}{7}}} \\ -\frac{5}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} & 1 - 25\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} & -4\frac{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{s^{\frac{4}{5}}} \\ 0 & -9\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{s^{\frac{3}{4}}} & 1 - 4\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{s^{\frac{2}{3}}} \end{vmatrix}}$$

أي أن

$$W(s) = \frac{2}{s^3}$$

للحصول على حلِّ المنظومة المعطاة يتمّ أخذ تحويل لابلاس العكسي لـ $U(s), V(s)$ و $W(s)$ حيث

$$u(x) = L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

وحيث $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$، فإن

$$u(x) = L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2s^{\frac{3}{2}}}\right\} = \sqrt{x},$$

و

$$v(x) = L^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{3}\pi}{9\Gamma(\frac{2}{3})s^{\frac{4}{3}}}\right\}$$

وباستخدام الخاصية التالية لدالة جاما

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

وبوضع $z=\frac{1}{3}$ نحصل على

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

وبالتالي

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{2}{3})}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3\Gamma(\frac{2}{3})}$$

الآن حسب قيمة $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ فإن

$$v(x)=L^{-1}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3s^{\frac{4}{3}}}\right\}=x^{\frac{1}{3}},$$

$$w(x)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}=x^2.$$

بالتالي حلِّ المنظومة المعطاة يكون

$$\big(u(x),v(x),w(x)\big)=\left(\sqrt{x},x^{\frac{1}{3}},x^2\right).$$

ملاحظة:

إذا كانت منظومة المعادلات الخطية تحتوي على دوال مثلثية، زائدية وغيرها فأنه يفضل استخدام طريقة تحليل أدوميان المعدلة للحلِّ؛ لتقليل الحسابات وتوفير الجهد. المثال التالي يوضح ذلك:

مثـــال (3)

بفرض منظومة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال[1]

$$u(x)=\cosh x-\frac{3}{2}(\cosh x-1)^{\frac{2}{3}}-2\sinh^{\frac{1}{2}}x+\int_0^x\left(\frac{1}{(\sinh x-\sinh t)^{\frac{1}{2}}}u(t)+\frac{1}{(\cosh x-\cosh t)^{\frac{1}{3}}}v(t)\right)dt,$$

$$v(x)=\sinh x-\frac{5}{4}(\cosh x-1)^{\frac{4}{5}}-\frac{4}{3}\sinh^{\frac{3}{4}}x+\int_0^x\left(\frac{1}{(\sinh x-\sinh t)^{\frac{1}{4}}}u(t)+\frac{1}{(\cosh x-\cosh t)^{\frac{1}{5}}}v(t)\right)dt.$$

باستخدام طريقة تحليل أدوميان المعدلة، يتم تقسيم الدالتين f_1 و f_2 إلى

$$f_{11}=\cosh x,\qquad f_{12}=-\frac{3}{2}(\cosh x-1)^{\frac{2}{3}}-2\sinh^{\frac{1}{2}}x$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$f_{21} = sinh\, x, \qquad f_{22} = -\frac{5}{4}(cosh\, x - 1)^{\frac{4}{5}} - \frac{4}{3} sinh^{\frac{3}{4}} x$$

وبوضع

$$u_0(x) = f_{11} = cosh\, x \quad , v_0(x) = f_{21} = sinh\, x$$

الآن بالتعويض عن u_0 و v_0 في المنظومة (4) نحصل على

$$\begin{cases} u_1(x) = -\frac{3}{2}(cosh\, x - 1)^{\frac{2}{3}} - 2\, sinh^{\frac{1}{2}} x + \\ \qquad \int_0^x \left(\frac{cosh\, t}{(sinh\, x - sinh\, t)^{\frac{1}{2}}} + \frac{sinh\, t}{(cosh\, x - cosh\, t)^{\frac{1}{3}}} \right) dt \\ v_1(x) = -\frac{5}{4}(cosh\, x - 1)^{\frac{4}{5}} - \frac{4}{3} sinh^{\frac{3}{4}} x + \\ \qquad \int_0^x \left(\frac{cosh\, t}{(sinh\, x - sinh\, t)^{\frac{1}{4}}} + \frac{sinh\, t}{(cosh\, x - cosh\, t)^{\frac{1}{5}}} \right) dt \end{cases} \tag{15}$$

يتم حساب التكاملات في المنظومة (15) حيث

$$\int_0^x \left(\frac{cosh\, t}{(sinh\, x - sinh\, t)^{\frac{1}{2}}} + \frac{sinh\, t}{(cosh\, x - cosh\, t)^{\frac{1}{3}}} \right) dt = 2\, sinh^{\frac{1}{2}} x + \frac{3}{2}(cosh\, x - 1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\int_0^x \left(\frac{cosh\, t}{(sinh\, x - sinh\, t)^{\frac{1}{4}}} + \frac{sinh\, t}{(cosh\, x - cosh\, t)^{\frac{1}{5}}} \right) dt = \frac{4}{3} sinh^{\frac{3}{4}} x + \frac{5}{4}(cosh\, x - 1)^{\frac{4}{5}}$$

وبالتعويض عن ناتج التكاملات في المنظومة (15) نحصل علي

$$u_1(x) = 0 \quad , v_1(x) = 0$$

هذا يؤدي إلى أن

$$u_{k+1}(x) = 0 \quad , v_{k+1}(x) = 0, \quad k \geq 0$$

بالتالي حلِّ المنظومة المعطاة يكون

$$(u(x), v(x)) = (cosh\, x\, , sinh\, x).$$

الاستنتاجات: Conclusions

البحث عبارة عن دراسة تحليلية؛ لأنظمة معادلات فولتيرا التكاملية الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني. حلّ الأنظمة الخطية ضعيفة الاعتلال من النوع الثاني لمعادلات فولتيرا، تمّ تناوله تحليلياً، باستخدام طريقتي أدوميان التحليلية المعدلة، وتحويل لا بلاس. من هذه الدراسة نلاحظ أن طريقة تحليل أدوميان المعدلة تُعدّ طريقة فعّالة جداً وسهلة التطبيق، وملائمة لحل هذا النوع من المعادلات، حيث يتمّ تحديد الحلّ للمنظومة التكاملية بصورة سريعة؛ وذلك بحساب أول مركبتين فقط من مركبات الحلّ، وتظهر كفاءة هذه الطريقة على وجه الخصوص عند حلّ الأنظمة التي تحتوي على دوال مثلثية، زائديه. من

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

جانب آخر طريقة تحويل لابلاس تُعدّ تقنية قوية وفعّالة أيضاً؛ لحلِّ هذا النوع من الأنظمة، ولكنها تتطلب معرفة تحويلات لإبلاس لبعض الدوال، وإجراء الكثير من العمليات الحسابية، مقارنة بطريقة أدوميان المعدلة التي لا تتطلب الكثير من الحسابات وتوفر الجهد والوقت.

المراجع

[1] *A. Wazwaz, Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications, Springer Heidelberg, Dordrecht London, 2011.*

[2] *A. Wazwaz, A First Course in Integral Equations,* (*Second Edition*)*, World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd, 2015.*

[3] *D. W. Trim, Applied Partial Differential Equations, Pws Publlshing Company, 2003.*

[4] *H.Brunner، Volterra Integral Equation An Introduction to Theory and Applications، Cambridge University Press,2017.*

[5] *E. A. A. Ziada, Analytical solution of Abel integral equation, Nile Journal of Basic Science, volume 1, Number 1, August 2021.*

[6] *H. Han, X. He, Y. Liu, T. Lü, Extrapolation for solving a system of weakly singular nonlinear Volterra integral equations of the second Kind, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 88, No. 16, November 2011, 3507–3520.*

[7] *J. Mouley, M. M. Panja, B. N. Mandal, Approximate solution of Abel integral equation in Daubechies wavelet basis, CUBO, A Mathematical Journal, Vol. 23, no. 02, pp. 245-264, August 2021.*

[8] *K. Maleknejad, A. Shamloo, Numerical solution of singular Volterra integral equations system of convolution type by using operational matrices, Applied Mathematics and Computation 195 ,2008, 500–505.*

[9] *M. Nili Ahmadabadi, H. Laeli Dastjerdi, Tau approximation method for the weakly singular Volterra–Hammerstein integral equations, Applied Mathematics and Computation 285 (2016) 241–247.*

[10] *P.Mokhtary, Operational Muntz-Galerkin Approximation For Abel-Hammerstein Integral Equations of the Second Kind, Volume 45, pp. 183–200, 2016.*

[11] *S. Kumar، Om P. Singh, S. Dixit, Homotopy Perturbation Method for Solving System of Generalized Abel's Integral Equations, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), Vol. 6, pp. 268 – 283,2011.*

[12] *Y. Cherruault, G. Saccomandi, B.Some, New Results for Convergence of Adomian's Method Applied to Integral Equations, Mathl. Comput. Modelling Vol. 16, No. 2, pp. 85-93, 1992.*