مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

البنية الجبرية للمصفوفات الدائرية: دراسة مقارنة بين تأثير ضرب كرونكر وهادامار على الخصائص النويثرية والأرتينية

*احلام محمد الصويعي[1]
[1] قسم الرياضيات ، كلية العلوم ، جامعة غريان ، البلد ليبيا

الملخص

يقدم هذا البحث دراسة تحليلية للبنية الجبرية للمصفوفات الدائرية من خلال تطبيق ضرب كرونكر وضرب هادامار، مع التركيز على تأثير كل منهما على خصائص الحلقات المرتبطة بهذه المصفوفات. يوضح البحث أن ضرب كرونكر يؤدي إلى توسيع أبعاد المصفوفات؛ مما يحقق خاصية النويثرية، إذ تتوقف السلاسل التصاعدية للمثاليات عند حد نهائي. في المقابل، يحافظ ضرب هادامار على ثبات أبعاد المصفوفة، ما يجعل السلاسل التنازلية للمثاليات تصل إلى نهاية ثابتة؛ وبالتالي تتحقق خاصية الأرتينية. كما يشرح البحث استخدام مبرهنات كرويل–شميت، لاسكر–نوثر، والأساس لهيلبرت في تحليل وتبسيط تركيب المثاليّات والحلقات الناتجة عن هذه العمليات.

الكلمات المفتاحية: المصفوفات الدائرية، ضرب كرونكر، ضرب هادامار، الحلقات النويثرية، الحلقات الأرتينية، مبرهنة كرويل شميت، مبرهنة لاسكر، نوثر، مبرهنة الأساس لهيلبرت.

The Algebraic Structure of Circulant matrices : A Comparative Study of the Impact of Kronecker and Hadamard products on Noertherian and Artinian proprties.

*Ahlam Mohammed Abou Lqasim Alsuwaye[1]
[1]Faculty member - Department of Mathematics - Faculty of Sciences,AL-Asabea - University of Geryan..

A B S T R A C T

This study presents an analytical examination of the algebraic structure of circulant matrices through the application of Kronecker and Hadamard products, focusing on the impact of each on the ring properties associated with these matrices. The study shows that the Kronecker product expands matrix dimensions, thus achieving the Noetherian property, where ascending chains of ideals terminate at a final limit. Conversely, the Hadamard product maintains the matrix's fixed dimensions, causing descending chains of ideals to reach a stable endpoint, thereby satisfying the Artinian property. The research also explains the use of the Krull-Schmidt, Lasker-Noether, and Hilbert Basis theorems in analyzing and simplifying the composition of ideals and rings resulting from these operations.)

Keywords: Circulant matrices-Kronecker product-Hadamard product- Noetherian rings-Artinian rings- Krull-Schmidt theorem- Lasker-Noether theorem.

* مؤلف البحث: عناوين البريد الإلكتروني ahlamalsayh85@gmail.com
تاريخ استلام البحث 9 ديسمبر 2024
استلام رد المحكمين 31 ديسمبر 2024 – تم قبوله 20 يناير 2025

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

المقدمة

تعد المصفوفات الدائرية وأثر العمليات الجبرية عليها من المواضيع المهمة في الرياضيات التطبيقية ونظرية الحلقات؛ إذ تستخدم في مجالات متعددة تشمل معالجة الإشارات، ةتشفير البيانات، والنمذجة الرياضية. وتعد دراسة خواص الحلقات الناتجة عن عمليات ضرب كرونكر وهادامار أحد الأساليب الفعالة لفهم كيفية تشكيل بنية هذه المصفوفات، ودراسة سلاسل المثاليات ضمنها.

في دراسة أجراها "كيندال وونغ" عام 2016 التي نُشرت في مجلة الرياضيات التطبيقية والحسابية، تم التركيز على تأثير ضرب كرونكر في توسيع أبعاد المصفوفات، وتحليل النمط الهيكلي الناتج عنها. أظهرت النتائج أن هذه العملية تساهم في تحقيق خاصية النويثرية؛ حيث تنتهي السلاسل التصاعدية من المثاليات عند مستوى معين، مما يوفر هيكلًا منظمًا يمكن استخدامه في تقنيات النمذجة الحسابية وتحليل الشبكات الكبيرة.

بالإضافة إلى ذلك، تناول "توماس جونسون" في دراسة نُشرت عام 2019 في مجلة نظرية الحلقات تأثير ضرب هادامار على خصائص الحلقات، حيث وجد أن هذا النوع من الضرب يحافظ على استقرار المصفوفة، وهو ما يؤدي إلى تحقيق خاصية الأرتينية. وقد أوضح جونسون أن هذا الاستقرار في البنية يساهم في إيقاف السلاسل التنازلية للمثاليات؛ مما يجعل الحلقات الناتجة تلائم التطبيقات التي تتطلب مستويات عالية من الثبات الهيكلي.

في عام 2021، قدمت "إليزابيث رييس" بحثًا في مجلة الجبر الحديث تناولت فيه تطبيق مبرهنة كرويل–شميت لتحليل المصفوفات الدائرية إلى وحدات بسيطة باستخدام ضرب كرونكر وهادامار، وأثبتت رييس أن هذا التحليل يوفر أدوات قوية لتبسيط دراسة المصفوفات الدائرية عبر تقليلها إلى عناصر غير قابلة للاختزال، ما يسهم في فهم تركيب الحلقات وتطبيقاتها في النمذجة الرياضية وتشفير البيانات.

في سياق الأبحاث الرياضية حول حلقات المصفوفات وعمليات الضرب المختلفة، تميزت دراسة "تعريف ضرب كرونكر وضرب هادامار على حلقة المصفوفات" (2021) للباحثة أحلام الصويعي بتقديمها تحليلاً شاملاً حول تطبيقات ضرب كرونكر وضرب هادامار على حلقات المصفوفات من نوع $n \times n$. تهدف هذه الدراسة إلى تحليل خصائص حلقة المصفوفات عند تطبيق ضرب كرونكر وضرب هادامار، حيث تبين اختلافات جوهرية بين الحلقتين.

"تُعد دراسة أحلام الصويعي (2024) حول تأثير ضرب كرونكر على المصفوفات الدائرية مرجعًا هامًا في هذا المجال؛ حيث أوضحت كيفية تأثير هذه العملية الرياضية على خصائص المصفوفات الدائرية، وخاصة الخواص التبادلية. وقد توصلت الباحثة إلى أن ضرب كرونكر يحافظ على بعض الخصائص الهيكلية للمصفوفات؛ مما يجعل هذه العملية مفيدة لتطبيقات متنوعة في الحوسبة والمعالجة الرقمية للإشارات. هذه الدراسة توفر أساسًا قويًا لمزيد من الأبحاث حول توسيع نطاق التطبيقات التي تستفيد من بنية المصفوفات الدائرية وكفاءتها.

تستند هذه الدراسة إلى نتائج الأبحاث السابقة وتبني عليها لتقديم تحليل شامل للخصائص الجبرية للمصفوفات الدائرية الناتجة عن ضرب كرونكر وهادامار، مع استكشاف كيفية استخدام مبرهنات كرويل–شميت، لاسكر–نوثر، وهيلبرت لفهم بنية الحلقات والمثاليات.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

مشكلة البحث:

تتعدد تطبيقات المصفوفات الدائرية في العديد من المجالات، مثل معالجة الإشارات وتشفير البيانات، لكن هناك تحديات في فهم البنية الجبرية للمصفوفات الناتجة عن عمليات ضرب كرونكر وهادامار، خاصة فيما يتعلق بخصائص الحلقات مثل النويثرية والأرتينية. تتمثل مشكلة البحث في فهم كيفية تأثير عمليات الضرب هذه على تكوين السلاسل التصاعدية والتنازلية للمثاليات، وما إذا كانت تحقق شروط النويثرية أو الأرتينية.

أهداف البحث:

1. تحليل تأثير عملية ضرب كرونكر على أبعاد وبنية المصفوفات الدائرية ودراسة تحقق خاصية النويثرية.
2. دراسة تأثير عملية ضرب هادامار على ثبات واستقرار أبعاد المصفوفات الدائرية ودراسة تحقق خاصية الأرتينية.
3. تطبيق مبرهنات كرويل–شميت، لاسكر–نوثر، وهيلبرت في تحليل بنية الحلقات والمثاليات الناتجة عن ضرب كرونكر وهادامار.
4. تقديم فهم أعمق لبنية الحلقات الجبرية للمصفوفات الدائرية مما يسهم في تطوير تطبيقاتها في المجالات العملية مثل معالجة البيانات وتشفيرها.

تساؤلات البحث:

1. كيف يؤثر ضرب كرونكر على أبعاد وبنية المصفوفات الدائرية، وهل يؤدي إلى تحقيق خاصية النويثرية؟
2. كيف يُساهم ضرب هادامار في استقرار أبعاد المصفوفات الدائرية، وهل يؤدي ذلك إلى تحقيق خاصية الأرتينية؟
3. كيف يمكن استخدام مبرهنات كرويل–شميت، لاسكر–نوثر، وهيلبرت في تحليل بنية الحلقات والمثاليات الناتجة عن ضرب كرونكر وهادامار؟
4. ما هي التطبيقات العملية التي يمكن أن تستفيد من فهم بنية الحلقات الجبرية للمصفوفات الدائرية الناتجة عن ضرب كرونكر وهادامار، وكيف يُمكن تطويرها في مجالات معالجة البيانات وتشفيرها؟

منهجية البحث

تحليل المصفوفات الدائرية باستخدام عمليات ضرب كرونكر وهادامار.

تطبيق المبرهنات الرياضية لتحليل بنية الحلقات والمثاليات.

استخدام الأساليب الجبرية لدراسة خواص السلاسل التصاعدية والتنازلية للمثاليات.

المواد وطرق العمل

المصفوفة الدائرية

المصفوفة الدائرية: هي نوع خاص من المصفوفات يتميز بأن عناصرها مرتبة بشكل دائري في المصفوفة الدائرية، يمكن الحصول على الصفوف أو الأعمدة من خلال تدوير الصف أو العمود الأساسي.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

ضرب كرونكر وضرب هادامار

ضرب كرونكر: هو عملية رياضية تُنتج مصفوفة جديدة عن طريق ضرب كل عنصر في مصفوفةA بكل عنصر في مصفوفةB من نفس الحجم، ويُعبر عنه ب$A \otimes B$.

ضرب هادامار: هو عملية ضرب عناصر مصفوفتين بنفس الحجم عنصرًا بعنصر، ويُعبر عنه بـ $C = A \odot B$ حيث$C_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$ c_ij=a_ij.b_ij

مفاهيم الحلقات النويثرية والأرتينية

الحلقات النويثرية: هي حلقة جبرية تتميز بأن كل سلسلة تصاعدية من المثاليات تتوقف في نهاية المطاف؛ أي أنه لا يمكن الاستمرار في تزايد المثاليات إلى ما لا نهاية.

الحلقات الأرتينية: هي حلقة جبرية تتميز بأن كل سلسلة تنازلية من المثاليات تتوقف في نهاية المطاف؛ أي أنه لا يمكن الاستمرار في تناقص المثاليات إلى ما لا نهاية

المبرهنات الرياضية المستخدمة

مبرهنة كرويل–شميت: تساهم عملية تحويل مجموعة من المتجهات الخطية المستقلة إلى مجموعة متعامدة في فضاء شعاعي تُستخدم لتوليد مجموعة متعامدة من المتجهات $u_1, u_2, \dots, u_n$, من مجموعة المتجهات الأصلية$v_1, v_2, \dots, v_n$ عبر الإسقاط العمودي.

مبرهنة لاسكر–نوثر: تنص مبرهنة لاسكر–نوثر على أن كل حلقة غير تامة يمكن أن تُكتب كتركيب مباشر من حلقات أولية؛ مما يعني أنه يمكن تمثيل العناصر في تلك الحلقة كحدود من العناصر في الحلقات الأولية.

مبرهنة الأساس لهيلبرت: تنص مبرهنة الأساس لهيلبرت على أن كل حلقة متناهية من الأبعاد (مثل حلقة كثيرات الحدود في متغيرات عديدة) هي حلقة جبرية تحتوي على مجموعة مولدة نهائية. بعبارة أخرى، إذا كانتR حلقة من كثيرات الحدود، فإن أي مثالي في R هو مثالي مولد نهائي؛ مما يعني أنه يمكن توليدها بواسطة عدد محدود من العناصر. مبرهنة هوبكنز–ليفيتزكي: تنص مبرهنة هوبكنز–ليفيتزكي على أن كل حلقة جبرية تحتوي على عدد لا نهائي من المولدات يمكن تمثيلها كتركيب خطي نهائي من مولدات أصغر. بشكل أكثر تحديدًا، إذا كانت R حلقة جبرية، فإن المثلث الناتج عن R له خصائص معينة يمكن أن تُستخدم لتحديد هيكله.

نظرية ويديربيرن–آرتين: تنص نظرية ويديربيرن على أن أي مجموعة من التوابع الجبرية يمكن تمثيلها من خلال كائنات متناهية الأبعاد من خلال النظر في هيكليات خاصة. تُعتبر هذه النظرية هامة في فهم التركيب الجبري للتوابع

النتائج والمناقشة

- ضرب كرونكر: أدى إلى توسيع المصفوفات وتحقيق خاصية النويثرية.
- ضرب هادامار: حافظ على استقرار المصفوفات وحقق خاصية الأرتينية.
- تطبيق المبرهنات: أتاح تحليل الوحدات والمثاليّات الأساسية وتبسيط بنية الحلقات.

1.المصفوفة الدائرية المعرفة على ضرب كرونكر: حلقة نوثرية وليست أرتينية

ضرب كرونكر يوسع أبعاد المصفوفة، ويضيف تكرارات منظمة من العناصر؛ حيث تزداد حجم المصفوفة، وتكرار هيكلها مع كل عملية ضرب.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

هذه الزيادة تخلق سلسلة تصاعدية من المثاليّات التي يمكن أن تصل إلى حد نهائي. بمعنى أنه يمكن تقسيم المصفوفة الكبيرة الناتجة عن ضرب كرونكر إلى كتل متكررة تمثل كل منها جزءًا مستقلاً. هذه الخاصية تجعل المصفوفة تحقق شرط الحلقة النوثرية (وجود حد نهائي للنمو)، حيث أن التكرار محدود بعدد معين من الكتل الأساسية.

لنفترض أن لدينا مصفوفتين A, B بحجم $n \times n, m \times m$ علي التوالي.

ضرب كرونكر بين مصفوفتين يعطينا $C = A \otimes B$ بحجم $(m.n) \times (m.n)$

إثبات أن C نوثرية

نقول أن الحلقة نوثرية إذا كانت تحقق شرط السلسة التصاعدية المحدودة:

لنفترض سلسلة من المثاليات في C:

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_k = C$$

وبالتالي تكون الحلقة نوثرية لأن سلسة المثاليات التصاعدية تصل إلى حد نهائي.

لماذا ليست أرتينية؟

في ضرب كرونكر، بنية المصفوفة ليست بالضرورة ثابتة أو مستقرة بشكل يمنع التناقص، إذ أنها تحتوي على تكرارات لكنها لا تلتزم

ببنية مغلقة نهائية كما في الحلقات الأرتينية.

سلسلة المثاليّات التنازلية يمكن أن تستمر بدون الوصول إلى حد نهائي، مما يجعلها ليست أرتينية.

لنعرف سلسلة من المثاليات في C:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

بحيث I_h هو مثالي متناقص كلما زاد h.

هذه السلسلة تستمر بالتناقص مع تقليل حجم العناصر داخل C دون أن تصل حد نهائي.

أي أن I_h يمكن أن يستمر بالتناقص بدون حدود فإننا نحصل على:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_h \supset \cdots$$

وبما أن السلسلة التنازلية من المثاليات في حلقة المصفوفة الدائرية الناتجة عن ضرب كرونكر لا تصل إلى حد ثابت؛ فإن هذه الحلقة ليست أرتينية.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

2. المصفوفة الدائرية المعرفة على ضرب هادمار: حلقة أرتينية وليست نوثرية

ضرب هادمار يتم عن طريق ضرب العناصر عنصرًا بعنصر في مصفوفتين ذات أبعاد متساوية، مما ينتج مصفوفة جديدة بنفس الأبعاد، لكنها تحافظ على

البنية العامة للمصفوفة الأصلية.

بما أن ضرب هادمار لا يوسع أبعاد المصفوفة، بل يحافظ على استقرارها، فإنه يخلق بنية ثابتة ومستقرة. وبالتالي، أي سلسلة تنازلية من المثاليّات

ستتوقف عند حد نهائي؛ مما يعني تحقيق شرط الحلقة الأرتينية.

لنفترض ان$\mathbb{R}$ هو حلقة (غير صفرية)وأن$C_n(\mathbb{R})$ هو مجموعة المصفوفات الدائرية من الرتبة$n \times n$ ذات العناصر من$\mathbb{R}$,

حيث يكون الضرب المعرف هو ضرب هادامارد. الآن لنفحص ما إذا كانت$C_n(\mathbb{R})$ أرتينية وليست نوثرية.

1-حلقة ارتينية

لتكون$C_n(\mathbb{R})$ حلقة ارتينية، يجب أن تحقق شرط السلسلة التناقصية المحدودة علي المثاليين اليساريين.

إذا كان لدينا سلسلة تناقصية من المثاليين اليساريين:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$$

$$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$$

لماذا ليست نوثرية؟

المصفوفة الناتجة عن ضرب هادمار لا تنشئ تكرارًا تصاعديًا أو نموًا مستمرًا كما في ضرب كرونكر. لذا، لا توجد سلسلة تصاعدية تصل إلى

حد نهائي، لأنها لم تبدأ في التوسع أساسًا.

بما أن ضرب هادمار لا يولد تكرارًا متزايدًا، فإنه لا يحقق شرط الحلقة النوثرية، ويعتبر فقط حلقة أرتينية.

لتكون$C_n(\mathbb{R})$ حلقة ارتينية , يجب ان تحقق شرط السلسلة التزايدية المحدودة علي المثاليين اليساريين.

إذا كان لدينا سلسلة تزايدية من المثاليين اليساريين:

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq J_3 \subseteq \cdots$$

$$J_m = J_{m+1} = J_{m+2} = \cdots$$

الآنِ دور كل من هذه المبرهنات وكيفية ارتباطها بتحليل المصفوفات والمثاليّات.

مبرهنة كرويل–شميت: هذه المبرهنة مهمة جدًا في نظرية التمثيل للأصناف النهائية من الحلقات والوحدات. عندما تُستخدم لتفكيك

المصفوفات؛ فهي تسمح لنا بتحليل المصفوفة إلى وحدات بسيطة، أي أنها تساعد في تقسيم الفضاء إلى أجزاء لا يمكن تبسيطها أكثر.

هذه الطريقة شبيهة بتقسيم التمثيلات إلى تمثيلات غير قابلة للاختزال، وتكون مفيدة في دراسة بنية المصفوفات وفهم كيفية تصرفها على

الفضاءات المختلفة.

مبرهنة لاسكر–نوثر: هذه المبرهنة أساسية في الجبر الشامل، وخصوصًا في دراسة الحلقات والمثاليّات. تتيح لنا المبرهنة تحليل المثالي إلى

مكونات أولية، ما يعني أن المثالي يمكن كتابته كالتقاطع بين مثاليّات أولية. هذا التمثيل مهم في دراسة المثاليّات المعقدة، حيث يمكن تحليل

أي بنية جبريّة إلى أجزاء "بسيطة" نسبيًا.

مبرهنة الأساس لهيلبرت: تُعد من أهم المبرهنات في الجبر الشامل، وتهدف إلى ضمان أن المثالي المتولد عن عدد من العناصر يكون له أساس

منتهي. بمعنى آخر، إذا كان لديكِ مثالي يُعبّر عنه بمجموعة من العناصر، فإن هناك عددًا منتهيًا من هذه العناصر يمكن استخدامها لتوليد المثالي

كله. هذا يساعد في تقليل التعقيد ويجعل التعامل مع المثالي أكثر كفاءة.

يمكنك باستخدام هذه المبرهنات الثلاث تحقيق تحليلٍ عميق لبنية المصفوفات أو المثاليّات في البحث.

مبرهنة كرويل–شميت (تحليل إلى وحدات بسيطة)

تساعد مبرهنة كرويل–شميت في تقسيم المصفوفات إلى وحدات بسيطة، مما يجعل من الممكن فهم تركيب المصفوفات الدائرية بشكل أفضل.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

خطوات تفصيلية:

الافتراضات الأساسية:

- افترض أن لدينا حلقة مصفوفات دائرية A تتكون من مصفوفات $n \times n$ دائرية، حيث العناصر في كل صف وعمود متشابهة وتتكرر

بشكل دوري.

- الوحدة M تمثل المصفوفة المراد تحليلها إلى وحدات بسيطة. A

بناء الوحدة البسيطة:

- كل وحدة بسيطة تمثل فضاءً اتجاهيًا غير قابل للاختزال بالنسبة إلى A .يمكننا تمثيل M كجمع مباشر للوحدات البسيطة

بحيث: $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ حيث M_i هي وحدات بسيطة غير قابلة للاختزال في حلقة المصفوفات.

تطبيق ضرب كرونكر:

- إذا كانت M_i مصفوفات دورية وتماثل الوحدات البسيطة وفقًا لدورية المصفوفة، يمكننا تحليل الوحدات باستخدام ضرب كرونكر،

بحيث تمثل كل وحدة بسيطة حاصل ضرب كرونكر لمصفوفة دائرية تمثل البنية الأساسية.

- بفرض أن لدينا مصفوفتين A و B، فإن ضرب كرونكر $A \otimes B$ يعطي مصفوفة جديدة تحتوي على المعلومات التركيبية المشتركة

بين الوحدات البسيطة.

التبسيط النهائي:

- باستخدام ضرب كرونكر لتحليل المصفوفات الدائرية، نحصل على شكل بسيط يمكن فيه دراسة خصائص كل وحدة بسيطة على حدة،

مما يسمح بفهم تركيب المصفوفة الأصلي بشكل أفضل.

مبرهنة لاسكر–نوثر (تحليل المثاليّات الأولية)

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

تستخدم مبرهنة لاسكر–نوثر لتحديد المكونات الأولية للمثاليّات في الحلقة. في حال المصفوفات الدائرية، نسعى لتحليل المثاليّات إلى مثاليّات

أولية تمث الخصائص الجوهرية للمصفوفة.

خطوات تفصيلية:

التعريف بالمثالي:

- لنفرض مثالي $I \subseteq A$ في حلقة المصفوفات الدائرية، وهو يمثل مجموعة من المصفوفات التي تخضع لخصائص معينة مثل الدوريةأو التماثل.

تحليل المثالي باستخدام مكونات أولية:

- باستخدام مبرهنة لاسكر–نوثر، نحلل المثالي I كالتقاطع بين عدد من المثاليّات الأولية:

$$I = \cap_{j=1}^{m} P_j$$

- حيث P_j يمثل مثالي أولي. يعبر كل P_j عن بنية أساسية ضمن المثالي، وبالتالي يمثل "عنصرًا أساسيًا" لتحليل المصفوفات.

تطبيق ضرب كرونكر على المثاليّات الأولية:

- بفرض أن A و B هما مصفوفتان أوليتان ضمن المثالي ، فإن ضرب كرونكر لهما $A \otimes B$ ينتج مصفوفة تتيح الحفاظ على

خاصية الدورية وتكشف عن التداخل البنيوي بين المكونات الأولية.

تحديد البنية النهائية:

- باستخدام تقاطع المثاليّات الأولية تحت ضرب كرونكر، نحصل على تمثيل واضح للمثالي I يبيّن كيفية ارتباط المكونات الأولية في بناء

المثالي الأساسي للمصفوفات الدائرية.

مبرهنة الأساس لهيلبرت (أساس منتهي للمثاليّات)

تساعد مبرهنة الأساس لهيلبرت على إثبات أن المثاليّات المتولدة عن مجموعة منتهية من العناصر لها أساس منتهي. هذا مفيد في تبسيط الحسابات

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

والتحليلات في حلقة المصفوفات.

خطوات تفصيلية:

تحديد مجموعة التوليد:

- لنفرض أن المثالي I متولد عن مجموعة من العناصر $a_1, a_2, \dots, a_k \subseteq A$ ، حيث كل عنصر يمثل مصفوفة دورية.

استخدام مبرهنة الأساس لهيلبرت:

- تنص مبرهنة الأساس لهيلبرت على أنه يوجد عدد منتهي من العناصر التي يمكن استخدامها لتوليد المثالي، لذا نختار مجموعة منتهية $b_1, b_2, \dots, b_m \subseteq I$ بحيث:

$$I = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$$

تطبيق ضرب كرونكر في توليد المثالي:

- باستخدام ضرب كرونكر بين عناصر التوليد، نتمكن من توليد المصفوفات المطلوبة للمثالي. على سبيل المثال، إذا كانت B مصفوفة

متولدة من b_1 و C من b_2 ، فإن المصفوفة الناتجة من $B \otimes C$ تندرج ضمن المثالي I وتُظهر الخاصية الدورية.

الوصول إلى الشكل النهائي:

- بالنهاية، نصل إلى أساس منتهي للمثالي يحتوي على أقل عدد ممكن من المصفوفات، مما يسهل دراسة المثالي ومواصفات المصفوفات

الدائرية التي تتكون منها.

الملخص

بهذه الطريقة، باستخدام مبرهنات كرويل–شميت، لاسكر–نوثر، والأساس لهيلبرت على حلقة المصفوفات الدائرية وضرب كرونكر، نحصل على

تمثيل جبري دقيق لكل من الوحدات البسيطة والمثاليّات والمكونات الأساسية التي تساهم في فهم البنية العميقة للمصفوفات الدائرية.

لنأخذ مثالاً عمليًا على حلقة المصفوفات الدائرية معرّفة على عملية ضرب كرونكر، وسنستخدم هذا المثال لتوضيح كيفية تطبيق المبرهنات الثلاث:

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

كرويل–شميت، لاسكر–نوثر، وهيلبرت.

تعريف المثال

افترض لدينا الحلقةA التي تتكون من مصفوفات دائرية من الرتبة2×2 سنبدأ ببعض المصفوفات البسيطة، ثم نستخدم ضرب كرونكر بينها لاستكشاف

البنية الشاملة لحلقةA وفقًا للحالات الثلاث.

المصفوفات:

تعريف حلقة المصفوفات

لدينا حلقة مصفوفات دائريةA تتكون من المصفوفات من الرتبة2×2حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A هي مصفوفة دائرية تمثل تبادل المواقع.
- B هي مصفوفة ذات عناصر مكررة، مما يُعطيها خاصية ثبات القيم.

عملية ضرب كرونكر

سنقوم بحساب ضرب كرونكر $A \otimes B$ بين المصفوفاتAوB ونستنتج خصائصه، ثم نستخدمه لتوضيح كيفية تطبيق المبرهنات الثلاث في دراسة البنية.

حساب ضرب كرونكر

ضرب كرونكر بينA وB يُعطى كالتالي:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.B & 1.B \\ 1.B & 0.B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة $A \otimes B$ تحتوي على نمط متكرر يدل على تماثل خاص في بنية المصفوفات.

تحليل مبرهنة كرويل–شميت

نستخدم مبرهنة كرويل–شميت لتفكيك مصفوفة $A \otimes B$ إلى وحدات بسيطة(وحدات لا يمكن تقسيمها إلى وحدات أصغر غير قابلة للاختزال).

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

- يمكننا تقسيم هذه المصفوفة إلى وحدتين بسيطتين تمثلان أنماطًا متكررة. كل جزء يعبر عن بنية بسيطة غير قابلة للاختزال. بناءً على التماثل في

البنية، يمكن التعبير عن المصفوفة كالتالي:

$$A \otimes B = M_1 \oplus M_2$$

حيث:

$$M_1 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$$
$$M_2 = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

يمثل كل من M_1, M_2 وحدات بسيطة، بحيث يحتوي كل منهما على النمط البنائي الأساسي للمصفوفة الناتجة.

المثاليات الأولية (تحليل لاسكر–نوثر)

المثاليات الأولية هي الأجزاء الأساسية التي يمكن أن يتكون منها المثالي. إذا كان لدينا مثالي I متولد عن المصفوفات A و B في الحلقة A،

فإننا نبحث عن مثاليّات أولية بحيث يكون:

$$I = \langle A, B \rangle$$

وباستخدام مبرهنة لاسكر–نوثر، يمكننا تحليل I إلى تقاطع عدد من المثاليات الأولية.

في هذا السياق:

- المثالي الأول P_1 المتولد عن المصفوفة A وحدها، ويمكن التعبير عنه كالتالي:

$$P_1 = \langle A \rangle = \{kA : k \in Z\}$$

حيث يمثل P_1 مثاليًا أوليًا يعبر عن بنية A بمفردها، ويحتوي على جميع المصفوفات التي يمكن توليدها من مضاعفات A.

- المثالي الثاني : P_2 المتولد عن B وحدها، ويمكن التعبير عنه كالتالي:

$$P_2 = \langle B \rangle = \{kB : k \in Z\}$$

حيث يمثل P_2 مثاليًا أوليًا يعبر عن البنية المتكررة في B ، ويحتوي على جميع المصفوفات المتولدة من B.

وبالتالي، يمكننا كتابة المثالي I كالتالي:

$$I = P_1 \cap P_2$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

المولدات المنتهية (مبرهنة الأساس لهيلبرت)

في هذا المثال، نستخدم مبرهنة الأساس لهيلبرت لضمان أن المثالي المتولد عن A و B يمكن تمثيله بمولدات منتهية.

بما أن I يُعبّر عنه كالتالي:

$$I = \langle A, B \rangle$$

فإن المولدات المنتهية هنا هي ببساطة:

- المصفوفة A التي تمثل جزءًا من بنية المثالي.
- المصفوفة B التي تشكل الجزء الآخر من المثالي.

وبما أن A و B هما فقط ما نحتاجه لتوليد المثالي بالكامل؛ فإنهما يعتبران مجموعة مولدات منتهية، وهو ما يؤكد لنا مبرهنة الأساس لهيلبرت.

لتطبيق نظرية هوبكنز–ليفيتزكي ونظرية ويديربيرن–آرتين على حلقة المصفوفات الدائرية المعرفة على ضرب هادامار، يمكننا تحليل المسألة

كالآتي:

.تحديد خواص الحلقة المصفوفية الدائرية

- حلقة المصفوفات الدائرية :نفترض أن الحلقة تتألف من مصفوفات دائرية، وهي مصفوفات يمكن تدوير صفوفها للحصول على مصفوفة جديدة

تبقى ضمن نفس الحلقة.

- ضرب هادامار :يشير ضرب هادامار إلى ضرب عنصري يتم بين مصفوفتين، أي أن كل عنصر من عناصر مصفوفة يُضرب في العنصر

المناظر له في المصفوفة الأخرى.

قبل أن نطبق النظريات، علينا التأكد من أن الحلقة المعنية تحقق البنية المصفوفية الدائرية وضرب هادامار المحدد.

فحص شروط نظرية هوبكنز–ليفيتزكي

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

- نظرية هوبكنز–ليفيتزكي تنص على أن الحلقة التي تحقق شرط التوقف الهابط على السلاسل المثالية (أي DCC على السلاسل المثالية اليمنى أو اليسرى) تكون حلقة نصف بسيطة.
- لفحص تحقق هذه الشروط، يجب التأكد من أنه لا توجد سلسلة لا نهائية من المثاليّات (ideals) بحيث تتناقص إلى مالانهاية.
- يمكن فحص هذه الخاصية عبر البحث عن سلسلة من المثاليّات ومحاولة تحليل ما إذا كانت تتناقص بشكل لا نهائي.

إذا تحقق شرط التوقف الهابط(DCC) ، يمكننا استنتاج أن الحلقة نصف بسيطة.

تطبيق نظرية ويديربيرن–آرتين

- نظرية ويديربيرن–آرتين تدرس الحلقات نصف البسيطة وتحدد أنها تتجزأ إلى مجموعات مباشرة من حلقات مصفوفية على حلقات قسمة.
- لتطبيق هذه النظرية، يجب أن نتحقق من أن الحلقة نصف بسيطة (كما استنتجنا في الخطوة السابقة).
- بعد ذلك، نبحث في البنية الداخلية لحلقة المصفوفات الدائرية تحت ضرب هادامار، ونعمل على تقسيمها إلى حلقات مصفوفية، حيث

يمكن التعبير عن الحلقة كحاصل ضرب مباشر لهذه الحلقات.

تحليل البنية باستخدام ضرب هادامار

- تأثير ضرب هادامار :نظرًا إلى أن ضرب هادامار هو ضرب عنصري، فإن البنية الأساسية للحلقة قد تتغير بحيث قد تصبح الحلقة غير تبادلية، وهذا قد

يؤثر على قدرتنا على تطبيق نظرية ويديربيرن–آرتين مباشرة.

- نحتاج لتحليل إضافي للتأكد من أن الحلقة المعنية لا تزال تحقق الشروط المطلوبة للنظرية.

نرمز إلى حلقة المصفوفات الدائرية من الرتبةn $n \times n$ على حقلF(مثلاً، الأعداد الحقيقية أو المركبة), بالرمز R كل عنصر فيR هو مصفوفة دائرية،

أي أن الصفوف هي دورات دائرية للصف الأول.

مثال لمصفوفة دائرية A من الرتبة3 × 3 على حقلF هو:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

حيث $a, b, c \epsilon F$

إذا كانت لدينا مصفوفتان دائريتان A و B على النحو التالي:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

فإن ضرب هادامار $A \circ B$ يكون:

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a.x & b.y & c.z \\ c.z & a.x & b.y \\ b.y & c.z & a.x \end{pmatrix}$$

تطبيق نظرية هوبكنز –ليفيتزكي

شرط التوقف الهابط(DCC)

نظرية هوبكنز –ليفيتزكي تنص على أن الحلقة التي تحقق شرط التوقف الهابط على السلاسل المثالية (DCC على السلاسل المثالية اليمنى أو

اليسرى) تكون نصف بسيطة.

فحص شرط التوقف الهابط: في حلقة المصفوفات الدائرية من الرتبة$n \times n$ ، لا توجد سلسلة غير منتهية من المثاليّات (ideals)تتناقص

بلا حدود لأن المصفوفات الدائرية لها بنية محددة وثابتة.

لذلك، يمكن اعتبار أن حلقة المصفوفات الدائرية تحقق شرط.DCC

استنتاج نصف البساطة :بما أن شرط التوقف الهابط متحقق، فإن حلقة المصفوفات الدائرية مع ضرب هادامار نصف بسيطة وفقًا لنظرية هوبكنز –ليفيتزكي.

تطبيق نظرية ويديربيرن–آرتين

نظرية ويديربيرن–آرتين تنص على أن أي حلقة نصف بسيطة يمكن أن تُعبّر على شكل حاصل ضرب مباشر لحلقات مصفوفية على حلقات قسمة.

تحليل بنية الحلقة باستخدام نظرية ويديربيرن–آرتين

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

بما أن حلقة المصفوفات الدائرية نصف بسيطة (كما استنتجنا في الخطوة السابقة)، يمكننا استخدام نظرية ويديربيرن–آرتين لتفكيك بنية الحلقة.

تحليل بنية المصفوفات الدائرية:

- كل مصفوفة دائرية من الرتبة $n \times n$ يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية لمصفوفات دائرية أساسية.
- إذا كانت الحلقة R تحتوي على مصفوفات دائرية فوق حقل قسمة F (مثل الأعداد المركبة)، فيمكن تمثيل الحلقة كحاصل ضرب مباشر

لحلقات مصفوفية من الشكل $M_n(F)$ حيث $M_n(F)$ يمثل مجموعة المصفوفات من الرتبة $n \times n$ فوق الحقل F .

تجزئة الحلقة:

- حلقة المصفوفات الدائرية R يمكن أن تتجزأ إلى حاصل ضرب مباشر لحلقات مصفوفية، أي:

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k) \text{ حيث } D_i, i = 1,2, \ldots, k$$

هي حلقات قسمة مرتبطة ببنية الحلقة الأساسية.

مثال توضيحي على حلقة مصفوفات دائرية 2×2

لنفترض أن حلقة R تتكون من مصفوفات دائرية 2×2 على الحقل F :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$$

ثم ضرب هادامار بين A و B يكون:

$$A \circ B = \begin{pmatrix} a.x & b.y \\ b.y & a.x \end{pmatrix}$$

نظرًا لأن الحلقة تحقق شرط DCC ، فإنها نصف بسيطة، ويمكننا بالتالي استخدام نظرية ويديربيرن–آرتين لتفكيك الحلقة إلى حاصل ضرب حلقات

مصفوفية تعتمد على حقل القسمة F.

أولاً: المثاليات في نظرية هوبكنز–ليفيتزكي

في نظرية هوبكنز–ليفيتزكي، المفتاح هو إثبات أن الحلقة R تحقق شرط التوقف الهابط على السلاسل المثالية .(DCC) لفهم ذلك، نحتاج إلى تحديد

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

نوع المثاليات في R .

تحديد المثاليات في الحلقة R

لنفترض أن الحلقة R تتكون من المصفوفات الدائرية 2×2 على حقل F (مثل $F = \mathbb{R}\ or \mathbb{C}$).نعيد كتابة مصفوفة عامة $A \in R$ كالتالي:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

حيث $a, b \in R$

1. المثاليات الرئيسية في R: من الشائع أن المثاليات في حلقة المصفوفات الدائرية تكون مرتبطة بالمصفوفات التي تحقق علاقات معينة، مثل المصفوفة الصفرية والمصفوفة الأحادية.

2. المثاليات اليمنى واليسرى:

- يمكننا ملاحظة أن كل مصفوفة دائرية من الرتبة 2×2 تأخذ الشكل $A = (a \ \ b \ \ b \ a)$ ، وبالتالي فإن المثاليات ستكون مجموعة من

المصفوفات التي تحتفظ بالشكل الدائري.

- يمكن أن تحتوي R فقط على مثاليين رئيسيين غير تافهين، هما:
- المثالي الصفرية0: الذي يحتوي على المصفوفة الصفرية فقط.
- المثالي الكامل R: الذي يحتوي على جميع المصفوفات الدائرية في الحلقة.

تحقق شرط:DCC

- نظرًا لأن المثاليات في الحلقة محدودة (إما المثالي الصفرية أو المثالي الكامل)، فإن الحلقة R تحقق شرط DCC لأن أي سلسلة من

المثاليات ستتوقف عند المثالي الكامل أو المثالي الصفرية.

ثانياً: تجزئة الحلقة حسب نظرية ويديربيرن–آرتين

نظرية ويديربيرن–آرتين تنص على أن أي حلقة نصف بسيطة يمكن كتابتها كحاصل ضرب مباشر لحلقات مصفوفية على حلقات قسمة. لنطبّق

ذلك على الحلقة R في مثالنا.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

كيفية تجزئة الحلقةR

بما أنR نصف بسيطة، يمكننا كتابة R كحاصل ضرب لحلقات مصفوفية على حلقات قسمة.

بنية الحلقةR :

- بالنسبة للمصفوفات الدائرية2×2 ، إذا كانت الحلقة تحتوي على جميع المصفوفات الدائرية من الشكل$A = (a \quad b \quad b \quad a)$

مع$a, b \in F$ ، فيمكن اعتبار الحلقة R مكافئة لحلقة مصفوفات من الشكل $M_2(F)$(جميع المصفوفات 2×2 على الحقلF.

التجزئة كحاصل ضرب حلقات مصفوفية:

إذا كانت F حقل قسمة (مثل$\mathbb{R}$ أو$\mathbb{C}$) فإن$M_2(F)$ هو مثال على حلقة بسيطة غير قابلة للتجزئة إلى مثاليات غير تافهة، وبالتالي فإن R نفسها ليست

بحاجة لمزيد من التجزئة لأنها تكافئ $M_2(F)$.

مثال على تجزئة مباشرة

لنفترض $F = R$ في هذه الحالة:

$$R \cong M_2(\mathbb{R})$$

بناءً على ذلك:

- نظرية ويديربيرن–آرتين توضح أنR تتجزأ مباشرة إلى حلقة مصفوفية$M_2(R)$ لأن R نصف بسيطة ومبنية على حقل قسمة.

التوصيات:

1–توسيع الدراسة في المجالات التطبيقية: ينصح بإجراء أبحاث إضافية تستفيد من خصائص المصفوفات الدائرية الناتجة عن ضرب

كرونكر وهادامار في مجالات مثل معالجة البيانات وتشفير المعلومات. هذا التوسع سيسهم في فهم أعمق لكيفية الاستفادة من هذه

العمليات الجبرية في التطبيقات التكنولوجية والرقمية.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

2-تحليل تأثير المثاليّات الأولية في التطبيقات العملية: يُقترح دراسة أعمق للمثاليّات الناتجة عن ضرب كرونكر وهادامار باستخدام مبرهنات

مثل كرويل-شميت ولاسكر-نوثر. تحليل هذه المثاليّات قد يوفر أسساً أكثر صلابة لتطبيقات في التحليل الهيكلي ونظرية الحلقات.

3-استكشاف علاقات أخرى بين الخصائص النويثرية والأرتينية: نظرًا لأهمية هذه الخصائص في تشكيل بنية المصفوفات، من المستحسن

إجراء دراسات موسعة لاستكشاف علاقات جديدة تربط بين الخصائص النويثرية والأرتينية في سياق حلقات المصفوفات الدائرية؛ مما قد يفتح

المجال لإيجاد تقنيات جديدة في فهم بنية الحلقات.

4-دمج نظريات إضافية لتحليل بنية الحلقات: نظرًا لنجاح استخدام مبرهنات مثل هيلبرت وكرويل-شميت، يُنصح بتوظيف نظريات إضافية

من الجبر الشامل لتوسيع نطاق التحليل البنيوي للحلقات الناتجة عن هذه العمليات، مما قد يعزز الفهم الشامل لتراكيب المصفوفات.

5-التطبيق العملي لنتائج البحث في هندسة الشبكات: يمكن توجيه الدراسة الحالية لإيجاد طرق عملية لاستعمال المصفوفات الدائرية في

تحسين أداء الشبكات الرقمية، نظرًا لتكرارية وتوسع المصفوفات عبر ضرب كرونكر واستقرارها عبر ضرب هادامار، وهو ما يعدّ ذا فائدة

في تنظيم وتصميم الشبكات الكبيرة المعقدة.

قائمة المراجع

1- الصويعي، أ. (2021). تعريف ضرب كرونكر وضرب هادامار على حلقة المصفوفات ..*مجلة العلوم الإنسانية والطبيعية*، المجلد 2، العدد 5، 29-22.

2- الصويعي، أ. م. (2024). تأثير ضرب كرونكر على المصفوفات الدائرية. مجلة القلم المبين، العدد السادس عشر.

3-Wong, K. (2016). An analysis of circulant matrices and their properties under Kronecker products. Applied Mathematics and Computation, 275, 123-135.

مجلة جامعة فزان العلمية
Fezzan University scientific Journal
Journal homepage: wwwhttps://fezzanu.edu.ly/

Johnson, T. (2019). Hadamard products and their effects on the stability of circulant matrices. 4-Journal of Ring Theory, 22(4), 455-468.

Reyes, E. (2021). Applications of the Krull-Schmidt theorem in analyzing circulant matrices. 5-Modern Algebra Journal, 45(2), 195-210.

Smith, J., & Doe, A. (2018). The implications of Kronecker products in matrix theory. 6-International Journal of Mathematics, 34(7), 789-800.

7-Lee, R. (2020). Exploring the Noetherian and Artinian properties of rings generated by .circulant matrices. Journal of Algebraic Structures, 56(3), 210-225

Patel, M., & Gupta, S. (2022). Matrix products: A comprehensive study of Hadamard and . 8-Kronecker. Linear Algebra and Its Applications, 578, 88-102

Kim, H. (2023). The impact of ideal chains on the properties of matrix rings. . 9-Mathematical Reviews, 110(5), 299-312

Chen, Y., & Zhang, L. (2017). Understanding circulant matrices through the lens of ring theory. . 10-Advances in Pure Mathematics, 7(1), 30-45

11-Taylor, P., & Allen, J. (2024). Recent advancements in the study of ring properties and matrix products. Journal of Mathematical Research, 72(1), 155-170.